L'oral à l'agreg - Isenmann p.388 [LA]
Les maths en tête Algèbre - Gourdon [LMAG]

Suite de polygones

L152 L155
L181 L223
L191 L149
L226
L153

Définition

L'isobarycentre de $(z_1; \dots; z_n) \in \mathbb{C}^n$ est :

$$g = \frac{z_1 + \dots + z_n}{n}$$

Théorème du déterminant circulant

Soit $(a_0; \dots; a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ et $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$

Alors
$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{vmatrix} = \prod_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{jk}$$

Démon :

Soit C la matrice ↑ et

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & 1 \\ 1 & 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que : $C = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k$

Diagonalisons C en diagonalisant J.

On résout $JX = \lambda X$ avec $X = {}^t(x_1; \dots; x_n) \neq 0$ et $\lambda \in \mathbb{C}$

i.e. $\begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ \vdots \\ x_n = \lambda x_{n-1} \\ x_1 = \lambda x_n \end{cases}$ donc $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $x_i = \lambda^n x_i$

Ainsi les racines $\mathbb{U}_n = \{1; \omega; \dots; \omega^{n-1}\}$ sont potentielles v.p. de J et on vérifie $\forall k \in [\![0;n-1]\!]$,

$e_k = (1; \omega^k; \dots; \omega^{(n-1)k})$ est $\vec{v.p.}$ de J associé à ω^k

J possède alors n v.p. distinctes et est diagonalisable.

Il existe alors $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tq : $J = PDP^{-1}$ avec :

$D = \mathrm{diag}(1; \omega; \dots; \omega^{n-1})$

Ainsi,

$$\det(C) = \det\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k\right) = \det\left(P\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k\right)P^{-1}\right) = \prod_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{jk}\right)$$

Soit P polygone du plan complexe dont les sommets sont $\{z_1; \dots; z_n\}$.

On définit par récurrence $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ avec $P_0 = P$ et où les sommets de P_{k+1} sont les milieux des arêtes de P_k.

Proposition

La suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers l'isobarycentre de P.

Démon :

L'idée est de montrer que $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge, trouver vers où elle converge et finalement de prouver que les P_k ont même isobarycentre.

On représente P_k par le vecteur $Z_k = \begin{pmatrix} z_1^k \\ \vdots \\ z_n^k \end{pmatrix}$

La relation de récurrence s'écrit :

$$Z_{k+1} = \begin{pmatrix} \frac{z_1^k + z_2^k}{2} \\ \vdots \\ \frac{z_n^k + z_1^k}{2} \end{pmatrix} = AZ_k \quad \text{avec } A := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \frac{1}{2} \\ 0 & & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \dots & & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$Z_0 = {}^t(z_1; \dots; z_n)$

Ainsi, $Z_k = A^k Z_0$. Il suffit de montrer que $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge pour n'importe quelle norme car on est en dimension finie.

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & & \vdots \\ \vdots & & & \\ a_1 & \dots & & a_0 \end{vmatrix} \quad \text{avec } \begin{cases} a_0 = \frac{1}{2} - x \\ a_1 = \frac{1}{2} \\ a_2 = \dots = a_{n-1} = 0 \end{cases}$$

Par le théorème du déterminant circulant,

$$\chi_A(x) = \prod_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{jk} = \prod_{j=0}^{n-1} (\lambda_j - x)$$

avec $\lambda_j = \frac{1 + \omega^j}{2}$

Puisque $\lambda_i = \lambda_j$ ssi $i = j$, χ_A est scindé à racines simples et A est alors diagonalisable.

Il existe $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ tq : $A = QDQ^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1; \dots; \lambda_n)$

Or : $\forall j \neq 0$, $|\lambda_j| = \left|\frac{1+\omega^j}{2}\right| = \left|e^{i\frac{j\pi}{n}} \frac{e^{i\frac{j\pi}{n}} + e^{-i\frac{j\pi}{n}}}{2}\right| = \left|\cos\left(\frac{j\pi}{n}\right)\right| < 1$

Ainsi, $\lambda_j^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ pour $j \neq 0$.

A^k converge alors vers $B := Q\,\mathrm{diag}(1; \dots; 0; 0)Q^{-1}$ (par continuité de $M \mapsto QMQ^{-1}$)

Soit $X = BZ_0$ tq : $Z_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} X$.

Par la relation $Z_{k+1} = AZ_k$ et par continuité de la multiplication à gauche, on a $X = AX$.

Or : l'espace propre associé à 1 contient $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et est de dimension 1 (car χ_A a n racines distinctes)

Ainsi, $\exists a \in \mathbb{C} \setminus X = \begin{pmatrix} a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix}$ i.e. P_k converge vers a.

$\forall k \in \mathbb{N}$, soit g_k l'isobarycentre de P_k qui vérifient :

$$g_{k+1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i^{k+1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{z_i^k + z_{i+1}^k}{2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i^k = g_k \quad (z_{n+1} = z_1)$$

Par continuité de la fonction qui à n points du plan associe son isobarycentre, g_k converge vers l'isobarycentre de ${}^t(a; \dots; a)$ qui est a

Temps

13,56' speed [illegible]

Temps [illegible]

Temps.

11'40" speed[illegible]